223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

Cadre : On appelle suite numérique toute suite à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une telle suite.

I Suites numériques et convergence

1) Limite d'une suite

Définition 1. On dit que (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{K}$ lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Si (u_n) ne converge pas, on dit qu'elle diverge.

Proposition 2. *Si (u_n) converge sa limite est unique. On note alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, ou encore $u_n \to \ell$.*

Application 3. *Une fonction $f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est continue si, et seulement si, pour toute suite (u_n) convergeant vers ℓ, $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.*

Exemple 4. *La fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ se prolonge par continuité en 0.*

Proposition 5. *Toute suite convergente de $\mathbb{K}$ est bornée.*

Contre-exemple 6. *La suite $u_n = (-1)^n$ est bornée et ne converge pas.*

Proposition 7. *Les suites convergente forment un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 8. *Le produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 converge vers 0.*

Exemple 9. *La suite $\frac{\sin n}{n}$ converge vers 0.*

On s'intéresse maintenant au cas des suites réelles.

Définition 10. Une suite réelle (u_n) est dite majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leqslant M$ (resp. $u_n \geqslant M$) quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 11. *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles vérifiant :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Définition 12. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissantes, et si $\lim_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

Proposition 13. *Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.*

Application 14 (Critère des séries alternées)**.** *Soit (a_n) une suite à termes positifs décroissante vers 0. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge, le reste R_n vérifiant $R_n \leqslant a_{n+1}$.*

2) Valeurs d'adhérence

Définition 15. On dit que $a \in \mathbb{K}$ est valeur d'adhérence de (u_n) lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \geqslant N,\ |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Remarque 16. *Si (u_n) converge, sa limite est une valeur d'adhérence.*

Exemple 17. *-1 et 1 sont valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$.*

Définition 18. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) une suite de la forme $u_{\varphi(n)})$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Proposition 19. *Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Proposition 20. *Soit $a \in \mathbb{K}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) a est valeur d'adhérence de (u_n).

(ii) Il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers a.

(iii) Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $a \in \overline{\{u_n \,|\, n \geqslant N\}}$.

(iv) a est point d'accumulation de $\{u_n | n \geqslant N\}$ ou $\{n | u_n = a\}$ est infini.

L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé.

Remarque 21. *Si $u_n \to \ell$, ℓ est l'unique valeur d'adhérence de (u_n).*

Exemple 22. *La suite $u_n = \cos n$ admet $[-1, 1]$ comme ensemble de valeurs d'adhérence.*

Théorème 23 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite numérique bornée admet une valeur d'adhérence.*

Corollaire 24. *Une suite réelle est convergente si, et seulement si, elle est bornée et admet une unique valeur d'adhérence.*

Proposition 25. *Soit (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I telle que $\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$. Alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est connexe.*

Application 26. *Soient $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $x_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} - x_n = 0$.*

3) Suites de Cauchy

Définition 27. On dit que (u_n) est de Cauchy lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall p \in \mathbb{N},\ |u_{n+p} - u_n| < \varepsilon$$

Proposition 28. *(i) Toute suite convergente est de Cauchy.*

(ii) Toute suite de Cauchy est bornée.

(iii) Toute sous-suite d'une suite de Cauchy est de Cauchy.

(iv) Toute suite de Cauchy ayant une valeur d'adhérence converge.

Théorème 29. *Toute suite numérique de Cauchy est convergente.*

Exemple 30. *Toute série numérique absolument convergente converge.*

Exemple 31. *La série harmonique diverge car elle n'est pas de Cauchy.*

II Exemples de suites particulières

1) Suites arithmétiques et géométriques

Définition 32. On dit que (u_n) est arithmétique (resp. géométrique) de raison $a \in \mathbb{K}$ si $u_{n+1} = u_n + a$ (resp. $u_{n+1} = a u_n$).

Proposition 33. *Si (u_n) est arithmétique (resp. géométrique) de raison $a \in \mathbb{K}$, alors $u_n = u_0 + na$ (resp. $u_n = a^n u_0$).*

Proposition 34. *Une suite géométrique converge si, et seulement si, $|a| < 1$ et est bornée si, et seulement si, $|a| \leqslant 1$.*

2) Suites homographiques

Définition 35. On dit que (u_n) est homographique lorsqu'elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = h(u_n) \quad \text{avec} \quad h(x) = \frac{ax+b}{cx+d},\ ad - bc \neq 0$$

Proposition 36. *Soit (u_n) une suite homographique. Soient α et β les solutions de $h(x) = x \Leftrightarrow cx^2 - (a-d)x - b = 0$.*

(i) Si $\alpha \neq \beta$, la suite $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)$ est géométrique de raison $\frac{a - \alpha c}{a - \beta c}$.

(ii) Si $\alpha = \beta$, la suite $\left(\frac{1}{u_n - \beta}\right)$ est arithmétique de raison $\frac{c}{a - \beta c}$.

Exemple 37. *Si $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$ avec $u_0 = 1$, $u_n \to 0$.*

3) Suites récurrentes d'ordre 1

Définition 38. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, et soit $f : I \to I$ continue. On dit que (u_n) est définie par récurrence si $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Remarque 39. *Il s'agit d'une généralisation des cas précédents.*

Corollaire 40. *Si une suite (u_n) est définie par récurrence converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est un point fixe de f.*

Exemple 41. *La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n - 3$ ne peut converger que vers -1 ou 3.*

Théorème 42. *Si (u_n) est définie par récurrence, alors :*

(i) Si f est croissante, la suite (u_n) est monotone et son sens de monotonie est donné par le signe de $u_1 - u_0$.

(ii) Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante, ainsi les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, et leur sens de monotonie est opposé.

Exemple 43. *Pour $u_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $u_{n+1} = sin(u_n)$, $u_n \to 0$.*

Exemple 44. *Pour $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2 - \sqrt{u_n}}$, $u_n \to 1$.*

Théorème 45 (Méthode de Newton)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) < 0 < f(b)$ et $f' > 0$ sur $[a,b]$. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :*

$$x_0 \in [a,b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \phi(x_n) = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

La fonction f admet un unique zéro $\alpha \in]a,b[$, et on a :

(i) Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $x_0 \in I =]\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge quadratiquement vers α, et il existe $C > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1} - \alpha| \leqslant C|x_n - \alpha|^2$$

(ii) Si de plus $f'' > 0$ sur $[\alpha, b]$, alors, pour $x \in]\alpha, b]$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$0 \leqslant x_{n+1} - \alpha \leqslant C(x_n - \alpha)^2 \quad \text{et} \quad x_{n+1} - \alpha \sim \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}(x_n - \alpha)^2$$

III Comportement asymptotique

1) Comparaison asymptotique

On s'intéresse ici au cas des suites réelles.

Définition 46. Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites réelles. On dit qu'au voisinage de $+\infty$:

(i) v domine u, noté $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, lorsque :

$$\exists C > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant C|v_n|$$

(ii) u est négligeable devant v, noté $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| \leqslant \varepsilon|v_n|$$

(iii) u et v sont équivalentes, noté $u_n \sim v_n$, si $u_n - v_n = \mathrm{o}(v_n)$.

Exemple 47. $n^2 + \sin n = \mathcal{O}\left(n^2\right)$ *et* $n^2 + \sin n \sim n^2$.

Proposition 48. *On a les propriétés suivantes :*

(i) o *et* $\mathcal{O}$ *sont stables par somme.*

(ii) o, $\mathcal{O}$ *et* $\sim$ *sont stables par produit et passage à une puissance.*

Remarque 49. $\sim$ *n'est pas compatible avec l'addition :* $n+2 \sim n+1$ *et* $-n \sim -n$, *mais* $2 \not\sim 1$.

2) Moyenne de Cesàro

Définition 50. On appelle suite des moyennes de Cesàro la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k$.

Proposition 51. *La moyenne de Cesàro d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Définition 52. Si la moyenne de Cesàro d'une suite converge, on dit qu'elle converge en moyenne de Cesàro.

Contre-exemple 53. *La suite* $(-1)^n$ *converge en moyenne de Cesàro, mais ne converge pas.*

Application 54. *Si* (u_n) *converge vers* $\ell \neq 0$, *et si* $u_n \neq 0$ *pour* $n \in \mathbb{N}$, *alors la suite* (v_n) *définie par* $\frac{n}{v_n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}$ *converge vers* ℓ.

Développements

— Connexité des valeurs d'adhérence d'une suite (25,26) [FGN13d]

— Méthode de Newton (45) [Rou15]

Références

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses

[Amr11] M. E. Amrani. *Suites et séries numériques, Suites et séries de fonctions.* Ellipses

[FGN13d] S. Francinou, H. Gianella, et S. Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 1.* Cassini

[Rou15] F. Rouvière. *Petit Guide de Calcul Différentiel.* Cassini

Annexes

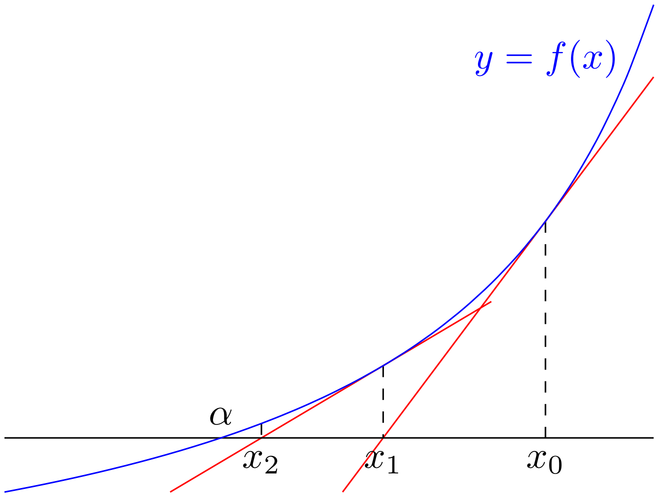

FIGURE 1 – Méthode de Newton